INFOMAPPE

ZUM EINSTUFUNGSTEST MATHEMATIK AN DER FOS/BOS MEMMINGEN

Liebe Schülerinnen und Schüler,

wie schnell man einen bereits einmal gekonnten „Stoff“ wieder vergisst, haben Sie sicherlich bereits schon öfter am eigenen Leib erfahren. Dies gilt leider auch für das mathematische Wissen und die mathematische Grundfertigkeiten. Damit Sie sich gezielt auf die FOS/BOS und den in der ersten Schulwoche stattfindenden Einstufungstest vorbereiten können, haben die Mathematiklehrer der FOS/BOS Memmingen zu den wichtigsten Themenbereich Erläuterungen und zusätzliche Übungsaufgaben zusammengestellt.
Die Infomappe gliedert sich in 7 Themenbereiche. Jedem Themenbereich ist eine kurze Zusammenfassung der entsprechenden Inhalte und Regeln vorangestellt. Durchgerechnete Musteraufgaben verdeutlichen den Sachverhalt. Am Ende der Themenbereiche finden Sie weitere Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung. Die Ergebnisse der weiteren Übungsaufgaben sind ebenfalls angegeben.

Nehmen Sie sich **vor** dem Schulbeginn wirklich die Zeit, sich mit dieser Infomappe vorzubereiten, das erleichtert Ihnen den Einstieg in den Mathematikunterricht der FOS/BOS ungemein. Sie sollten dabei für jeden Themenbereich im Durchschnitt mindestens einen Tag veranschlagen.

Sollten Sie weitere Informationen und Aufgaben suchen, finden Sie diese in verschiedenen Büchern und im Internet. Im Anschluss werden einige Vorschläge für Bücher gegeben, die über den Buchhandel zu beziehen sind.

- Wiederholung Algebra, V. Altrichter, Stark Verlag,
  ISBN 3-89449-124-8

- Trainingskurs Mathematik, C. u. H. Velten, Cornelsen,
  ISBN 3-464-41230-X
  Vorbereitung auf höhere berufsbildende Schulen

I. Bruchrechnen

1 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Definition: Brüche heißen „gleichnamig“, wenn sie denselben Nenner be:

Rechenregel: **Gleichnamige** Brüche werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man die Zähler **addiert** (bzw. **subtrahiert**) und den Nenner **beibehält**.

Beispiel: $\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{2+8}{3}=\frac{10}{3}=\underline{\underline{\frac{10}{3}}}$

$\frac{10}{3}$ lässt sich auch als $3\frac{1}{3}$ schreiben („gemischte Zahl“).
Dies ist mathematisch zwar korrekt und Sie sind es vielleicht aus der Mittelstufe so gewohnt, führt aber immer wieder zu Missverständnissen und Rechenfehlern. Daher sollten Sie künftig auf die Angabe von gemischten Zahlen verzichten.

Beachten Sie:
Möglicherweise können Ergebnisse **gekürzt** werden!

Beispiel: $\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{9-3}{4}=\frac{\cancelto{3}{6}}{\cancelto{2}{4}}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Übungsaufgaben:

1. $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=$
2. $\frac{3}{4}-\frac{-1}{4}+\frac{2}{-4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)=$
3. $\frac{k}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2k}{9}+\frac{7}{9}=$
4. $\frac{1}{k}+\frac{3}{k}=$

2 Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Rechenregel: **Ungleichnamige** Brüche müssen zunächst durch **Erweitern** auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner!) gebracht werden. Anschließend addiert bzw. subtrahiert man die Brüche nach den oben stehenden Rechenregeln.

Beispiel: $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Übungsaufgaben:

5. $\frac{t}{2}-\frac{t}{4}=$
6. $\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}=$
7. $5-\frac{2}{3}=$
8. $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

3 Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl

Rechenregel: Ein Bruch wird **mit einer Zahl** multipliziert, indem der **Zähler** mit der Zahl multipliziert wird. (Der Nenner wird beibehalten!!!)

Beispiel: $3\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{7}=\underline{\underline{\frac{12}{7}}}$

Übungsaufgaben:

9. $\frac{5}{2}\cdot 3=$

10. $\frac{5}{3}\cdot 4=$

11. $\frac{1}{2}\cdot 2k=$

12. $5p\cdot\frac{2}{3}=$

4 Multiplikation zweier Brüche

Rechenregel: **Zwei Brüche** werden multipliziert, indem die Zähler miteinander multipliziert **und** die Nenner miteinander multipliziert werden.

Beispiel: $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{3}{10}}}$

Übungsaufgaben:

13. $\frac{k}{3}\cdot\frac{2}{3}=$

14. $-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

15. $\frac{2}{-5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=$

5 Division zweier Brüche

Rechenregel: Man dividiert durch einen Bruch, indem mit dessen Kehrbruch multipliziert wird.

Beispiel: $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Beachten Sie:
Auch die Division eines Bruches durch eine Zahl kann so berechnet werden:

Beispiel: $\frac{3}{5}:2=\frac{3}{5}:\frac{2}{1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{3}{10}}}$

Übungsaufgaben:

16. $\frac{6}{5}:\frac{2}{5}=$

17. $\frac{k}{3}:\frac{k}{4}=$

18. $5:\frac{1}{t}=$

Vermischte Übungsaufgaben:

19. $2\cdot\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}t\cdot 3=$
20. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}x=$
21. $1-\frac{1}{2}p:\frac{1}{2}=$
22. $3\cdot 1\frac{1}{2}=$
23. $3\cdot\frac{3}{2}=$
24. $\frac{t}{2}+\frac{1}{2}-t+2=$
25. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:2=$
26. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):2=$

Wenn Sie die die Aufgaben 22 und 23 vergleichen, sollte klar werden, dass gemischte Zahlen bei der Berechnung unbequem sind.

(Zudem ist die Umrechnung eine unnötige Fehlerquelle.)

Anmerkung: Die Aufgaben zum Bruchrechnen im Buch sind recht stark mit **BINOMEN** bzw. **BINOMISCHEN FORMELN** vermischt, daher nicht ganz einfach. Versuchen Sie diese aber trotzdem und wiederholen Sie mit Ihren alten Schulunterlagen oder über das Internet das Thema **BINOMISCHE FORMELN**. Dabei können Sie sich auf die <u>ersten drei</u> **BINOMISCHEN FORMELN** beschränken.

Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3-5+1}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$
2. $\frac{3}{4}-\frac{-1}{4}+\frac{2}{-4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\right)=\frac{3+1-2-3-7}{4}=\frac{-8}{4}=\underline{\underline{-2}}$
3. $\frac{k}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2k}{9}+\frac{7}{9}=\frac{k+1-2k+7}{9}=\underline{\underline{\frac{-k+8}{9}\text{oder}=\frac{8-k}{9}}}$
4. $\frac{1}{k}+\frac{3}{k}=\frac{1+3}{k}=\underline{\underline{\frac{4}{k}}}\text{ (nicht }4k!)$
5. $\frac{t}{2}-\frac{t}{4}=\frac{2t}{4}-\frac{t}{4}=\frac{2t-t}{4}=\underline{\underline{\frac{t}{4}}}$
6. $\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}=\frac{2}{2p}+\frac{1}{2p}=\underline{\underline{\frac{3}{2p}}}$ (nicht $\frac{3}{2}p$!)

7. $5-\frac{2}{3}=\frac{5}{1}-\frac{2}{3}=\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$

8. $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4\cdot 4-1\cdot 6+1\cdot 3}{12}=\frac{13}{12}$

9. $\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}$

10. $\frac{5}{3}\cdot 4=\frac{5\cdot 4}{3}=\frac{20}{3}$

11. $\frac{1}{2}\cdot 2k=\frac{1\cdot \cancel{2}k}{\cancel{2}}=k$

12. $5p\cdot\frac{2}{3}=\frac{5p\cdot 2}{3}=\frac{10p}{3}$ oder $=\frac{10}{3}p$

13. $\frac{k}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{k\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{2k}{9}$

14. $-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}=-\frac{\cancel{3}\cdot 8}{4\cdot\cancel{3}}=-2$

15. $\frac{2}{-5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{2\cdot(-3)}{-5\cdot 4}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{3}{10}$

16. $\frac{6}{5}:\frac{2}{5}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{6\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 2}=\frac{6}{2}=3$

17. $\frac{k}{3}:\frac{k}{4}=\frac{k}{3}\cdot\frac{4}{k}=\frac{\cancel{k}\cdot 4}{3\cdot\cancel{k}}=\frac{4}{3}$

18. $5:\frac{1}{t}=5\cdot\frac{t}{1}=5t$

19. $2\cdot\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}t\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}t=0$

20. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}x=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)x=\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{8}\right)x=-\frac{1}{8}x$

21. $1-\frac{1}{2}p:\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}p\cdot\frac{2}{1}=1-p$ („Punkt vor Strich!“)

22. $3\cdot 1\frac{1}{2}=3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=3\cdot 1+3\cdot\frac{1}{2}=3+1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

23. $3\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

24. $\frac{t}{2}+\frac{1}{2}-t+2=\frac{t}{2}-t+\frac{1}{2}+2=\frac{t}{2}-\frac{2t}{2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{t}{2}+\frac{5}{2}$

25. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

26. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):2=\left(\frac{3+2}{6}\right):2=\frac{5}{6}:2=\frac{5}{12}$

II. WURZELRECHNUNGEN

Definition und Beispiel:

$x^2 = 9$

2 Lösungen

$x_1 = +\sqrt{9}$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{9}$

$x_1 = +3$ $\qquad$ $x_2 = -3$

das heißt: $\sqrt{9} = 3$; (und **nicht**: ± 3)

in Worten: Die Quadratwurzel einer positiven Zahl a (z.B. a = 9) bezeichnet diejenige **positive** Zahl $\sqrt{a}$ ($\sqrt{9} = 3$), die mit sich selbst multipliziert a ergibt ($3 \cdot 3 = 9$).

Folgerung: Es kann keine Quadrat-Wurzel aus einer negativen Zahl geben!!!

Rechenregeln:

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

allgemein: $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$ und auch: $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Aufpassen!!! $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

$\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 5 \quad (\sqrt{25} = 5)$

also: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$

Anwendungen:

teilweises „Radizieren“ (Wurzelziehen)

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

Nenner rational „machen“

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufgaben zum Wurzelrechnen:

1. Berechnen Sie beide Terme und vergleichen Sie:

a) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$; $\sqrt{9+16}$

b) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}$; $\sqrt{9\cdot 25}$

c) $\sqrt{25}-\sqrt{9}$; $\sqrt{25-9}$

d) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$; $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$

2. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\sqrt{81}$; b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$; c) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{-5}\;^{2}$; e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; f) $\sqrt{0{,}81}$

g) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8{,}1}\cdot\sqrt{2}$; h) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2{,}5}}$; i) $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$

3. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (durch teilweises Radizieren)
und überprüfen Sie mit dem Taschenrechner

Beispiel: $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=2\cdot\sqrt{6}$

$\sqrt{24}\approx 4{,}90$; $2\cdot\sqrt{6}\approx 4{,}90$

a) $\sqrt{28}$; b) $\sqrt{45}$; c) $\sqrt{75}$; d) $\sqrt{128}$

e) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$; f) $\dfrac{4-\sqrt{28}}{2}$; g) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

Lösungen:

1a) $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$; $\sqrt{25}=5$

1b) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{25} = \sqrt{9\cdot 25} = 15$

1c) $\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$; $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

1d) $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

3a) $\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=2\sqrt{7}$; 3b) $\sqrt{45}=\sqrt{5\cdot 9}=3\sqrt{5}$

3c) $\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$; 3d) $\sqrt{128}=\sqrt{2\cdot 64}=8\sqrt{2}$

3e) $\sqrt{12}+\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

3f) $\dfrac{4-\sqrt{28}}{2}=\dfrac{4-\sqrt{4\cdot 7}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7}$

3g) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2\cdot 7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1-\sqrt{2}$

2a) $\sqrt{81}=9$; 2b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$; 2c) $\sqrt{(-5)^2}=5$

2d) $\sqrt{-5}\;^{2}\notin\mathbb{R}$; 2e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

2f) $\sqrt{0{,}81}=\sqrt{\dfrac{81}{100}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$

2g) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8{,}1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{5\cdot 8{,}1\cdot 2}=\sqrt{81}=9$

2h) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2{,}5}}=\sqrt{\dfrac{10}{2{,}5}}=\sqrt{4}=2$

2i) $\sqrt{12}-\sqrt{3}\;^{2} = \sqrt{12}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}-\sqrt{3} =$

$=\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}-\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$

$=12-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}+3=12-2\cdot\sqrt{36}+3=3$

III. Zusammenfassen von Termen

Terme bestehen aus Zahlen, Variablen oder Rechenausdrücken mit Zahlen und Variablen.

Bsp.) 2 ; m ; $2\cdot a+b^2$; $a-\dfrac{b^2+b}{5a}$.

Unterscheide:

$2m = 2\cdot m = m + m$ und $m^2 = m\cdot m$; $m^3 = m\cdot m\cdot m$ (Potenz mit **Basis** m und **Exponent** 3)

2m, m^2 und m^3 sind **verschiedenartige** Terme; sie lassen sich **NICHT zusammenfassen**.

Es lassen sich nur **gleichartige** Terme zusammenfassen.

1. Addition von gleichartigen Termen

Gleichartige Terme werden addiert, indem man deren Koeffizienten (hier 2 und 3) addiert.

Bsp.) ① $2m + \underline{3m} = m + m + \underline{m + m + m} = 5m = (2 + 3)\cdot m$ (Addition von Längen)

② $8m^2 - 3m^2 = 5m^2$;

ABER: $8m - 3m^2$ lässt sich **NICHT** zusammenfassen!

2. Multiplikation von Termen

Terme werden multipliziert, indem man die Koeffizienten der Terme multipliziert und dann die Variablen multipliziert.

Bsp.) ① $2\cdot 3m = 3m + 3m = 6m$ $(2\cdot 3 = 6)$

② $2m\cdot 3m^2 = 2\cdot 3\cdot m\cdot m^2 = 6\cdot m\cdot m\cdot m = 6m^3$ $(m\cdot m^2 = m^3)$

③ $-5a\cdot 4ab = -5\cdot 4\cdot a\cdot a\cdot b = -20a^2b$

!!! VORZEICHENREGEL beachten !!!

$+\cdot+ = +$ und $-\cdot- = +$; $+\cdot- = -$ und $-\cdot+ = -$

Musteraufgaben:

(Falls notwendig Einzelterme ausmultiplizieren, gleichartige Terme gleich unterstreichen; Ergebnis nach Potenzen mit fallenden Exponenten ordnen)

① $12a^2 + 4a^3 + 17a^3 - 3a^2 + a = \underline{12a^2} + \underline{\underline{4a^3}} + \underline{\underline{17a^3}} - \underline{3a^2} + a = 21a^3 + 9a^2 + a$

② $3a^2\cdot 4ab + 10a\cdot 2ab - 6b\cdot 2a^3 - 3a\cdot 2a^3b^2 + a^2b\cdot 6ab + 3a^2b\cdot 4a =$

$\underline{12a^3b} + 20a^2b - \underline{12a^3b} - 6a^4b^2 + 6a^3b^2 + \underline{12a^3b} = -6a^4b + 6a^3b^2 + 12a^3b + 20a^2b$

Übungsaufgaben zum Zusammenfassen von Termen

1. $3x^2 + 7x^2 - 14x^2 + 35x^2 =$
2. $13x + 7xy - 4y - 6x + 14xy + 18y - 7y =$
3. $18x^2 + 14u - 13x^2 - 2x + 2u + 4x - u =$
4. $2a^2 - 2b^2 - 3a^2b + 5b^2 + 10a^2 - 6a^2 + 6a^2b =$
5. $-3a^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}ab\right) \cdot 6ab^2 =$
6. $3x \cdot 5z + 2x \cdot 3y - 4xz + 5xy =$
7. $3a \cdot 2b - 2a \cdot 2 + 4ab + 2a^2 =$
8. $4u^2 \cdot v + u + 4u \cdot v - 2u \cdot (-uv) =$
9. $13xy^2 \cdot 2xy - 2{,}5x^2 \cdot 4y^2 - 5x^2y \cdot 3y^2 + 2xy \cdot 5y^2 =$
10. $\frac{1}{3}u \cdot \frac{1}{2}w^2 + u + w^2 - \frac{1}{3}uw \cdot w - \frac{5}{6}u \cdot w^2 =$

Ergebnisse:

1. $31x^2$
2. $21xy + 7x + 7y = 7 \cdot (3xy + x + y)$
3. $5x^2 + 2x + 15u$
4. $3a^2b + 6a^2 + 3b^2 = 3 \cdot (a^2b + 2a^2 + b^2)$
5. $4a^4b^3$
6. $11xy + 11xz = 11x \cdot (y + z)$
7. $2a^2 + 10ab - 4a = 2a \cdot (a + 5b - 2)$
8. $6u^2v + 4uv + u = u \cdot (6uv + 4v + 1)$
9. $11x^2y^3 - 10x^2y^2 + 10xy^3 = xy^2 \cdot (11xy - 10x + 10y)$
10. $-uw^2 + u + w^2$

IV. RECHNEN MIT KLAMMERN

A) **Ausmultiplizieren und Zusammenfassen**

Regel: Besteht bei einem Produktterm ein Faktor aus einer Summe, so wird jeder Summand mit dem Faktor multipliziert, der vor der Klammer steht. Die Vorzeichenregeln sind dabei zu beachten. Gleichnamige Terme werden anschließend zusammengefasst.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
$$-1 \cdot (a - b) = -a + b = b - a$$

Beispiel:

$$3x \cdot (x - 2y) = 3 \cdot x \cdot x - 3 \cdot x \cdot 2 \cdot y = 3x^2 - 6xy$$

Aufgaben:

1. $7(4x - 3y) - 8(2x + 5y)$
2. $2x(2 - 2x + 5y) - 2y(5x - 2)$
3. $4x(x - y) - [3x(x + y) - 2x(x - y)]$

Regel: Sind bei einem Produkt beide Faktoren Summen, so muss jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert werden. Vorzeichenregeln beachten.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Beispiel:

$$(3x + 2y)(2x - 2y) = 6x^2 - 6xy + 4yx - 4y^2 = 6x^2 - 2xy - 4y^2$$

Aufgaben:

4. $(7x + 8y)(x - y)$
5. $(3x - 2y)(3x + 2y)$
6. $(2x - 3y - 2)(4 - 2x + 2y)$

Weitere Aufgaben für Unverzagte:

7. $(2x + y)(x - y) - [(x + 3)(2x - 4y) + 3x(4y - 2x)]$
8. $(x - 1)(x^2 + 2x - 1) - (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
9. $(x - y + 3)(2x - y) - (2x + y)[(5x - 3y + 2) - (3x + 4y + 4)]$
10. $(2x - 2y)(x + 4y) - (4x + y)(2x - 3y) + (x - 3y)(3x - y) - (2x - 2y)(x - 3y)$

B)	**Ausklammern (Faktorisierung)**

Regel: Besitzen die Glieder eines Summenterms einen gemeinsamen Faktor, der ein einfacher Faktor oder selbst ein Summenterm sein kann, so kann dieser gemeinsame Faktor ausgeklammert werden. Auch hier gilt es, die Vorzeichenregeln zu beachten.

$$ab + ac = a(b + c)$$
$$ab - ac = a(b - c) = -a(c - b)$$
$$6ac - 9ad + 8bc - 12bd = 3a(2c - 3d) + 4b(2c - 3d) = (2c - 3d)(3a + 4b) =$$
$$= (3a + 4b)(2c - 3d)$$

Beispiel:

$$6x^2 + 3xy - 9xz = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x + 3 \cdot x \cdot y - 3 \cdot 3 \cdot x \cdot z = 3x(2x + y - 3z)$$

Aufgaben:

1. $8ax - 2ay$
2. $\frac{1}{4}bx - \frac{3}{4}by$
3. $3ax + 12ay - 15az$
4. $\frac{1}{3}ab + \frac{5}{12}ac - \frac{2}{9}ad$
5. $42abc^2 + 35ab^2c - 28a^2bc$
6. $x(u - v) - y(u - v)$
7. $x(3 - r) - (r - 3)$
8. $x(3a - b) + y(b - 3a) + 3az - bz$
9. $(5a - 3b)(8m - n) + (2a - b)(8m - n)$
10. $3ax - 5bx + 3ay - 5by$

Ergebnisse der Übungsaufgaben

A)	1.	$12x - 61y$
	2.	$4x - 4x^2 + 4y$
	3.	$3x^2 - 9xy$
	4.	$7x^2 + xy - 8y^2$
	5.	$9x^2 - 4y^2$
	6.	$-4x^2 + 12x + 10xy - 16y - 6y^2 - 8$
	7.	$6x^2 - 9xy - y^2 - 6x + 12y$
	8.	$x^2 - 1$
	9.	$-2x^2 + 9xy + 8y^2 + 10x - y$
	10.	$-5x^2 + 14xy - 8y^2$
B)	1.	$2a(4x - y)$
	2.	$\frac{1}{4}b(x - 3y)$
	3.	$3a(x + 4y - 5z)$
	4.	$\frac{1}{36}a(12b + 15c - 8d)$
	5.	$7abc(6c + 5b - 4a)$
	6.	$(u - v)(x - y)$
	7.	$(3 - r)(x + 1)$
	8.	$(3a - b)(x - y + z)$
	9.	$(8m - n)(7a - 4b)$
	10.	$(3a - 5b)(x + y)$

V. Gleichungen

A) Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen werden nach folgendem Schema gelöst:

1. Alle Terme mit der Unbekannten x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen auf die linke Seite der Gleichung bringen.

2. Alle Terme ohne die Unbekannte x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen auf die rechte Seite der Gleichung bringen.

3. Auf der linken Seite der Gleichung die Unbekannte x ausklammern.

4. Die gesamte Gleichung durch den ausgeklammerten Term teilen.

5. Lösungsmenge bestimmen.

Bsp.:		$7x+15=2x+30$	$\vert -2x$	(siehe 1.)
	1.	$5x+15=30$	$\vert -15$	(siehe 2.)
	2.	$5x=15$	$\vert \mathit{erledigt}$	(siehe 3.)
	3.	$(5)\bullet x=15$	$\vert :(5)$	(siehe 4.)
	4.	$x=3$		(siehe 5.)
	5.	$L=\ 3$		

Übungsaufgaben Lineare Gleichungen

		Ergebnisse	
Ü1.	$\frac{1}{2}x-4=0$	Ü1.	$L=\ 8$
Ü2.	$3x+5=0$	Ü2.	$L=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$
Ü3.	$-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x-\frac{11}{3}$	Ü3.	$L=\ 2$
Ü4.	$\frac{1}{6}x-2=\frac{2}{7}x+\frac{1}{2}$	Ü4.	$L=\ -21$
Ü5.	$-\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}x-3$	Ü5.	$L=\ 4$
Ü6.	$-\frac{1}{3}x+\frac{7}{8}=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$	Ü6.	$L=\ 7{,}5$
Ü7.	$-\frac{1}{4}x+\frac{5}{6}=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}-x$	Ü7.	$L=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$
Ü8.	$2x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x+1-x$	Ü8.	$L=\left\{\frac{1}{4}\right\}$
Ü9.	$-\frac{3}{8}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{7}x+\frac{5}{3}+\frac{139}{56}x$	Ü9.	$L=\ -1$
Ü10.	$\frac{1}{2}x-3=4x+7-\frac{3}{2}x$	Ü10.	$L=\ -5$

B) Quadratische Gleichungen

Eine allgemeine Quadratische Gleichung kann durch Äquivalenzumformungen immer leicht auf folgende Form gebracht werden:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{, mit } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Zum Lösen quadratischer Gleichungen werden 3 „Werkzeuge“ verwendet. Diese sind:

1. **AUSKLAMMERN**
2. **RADIZIEREN**
3. **QUADRATISCHE LÖSUNGSFORMEL**

Im Folgenden wird gezeigt, wann welches „Werkzeug“ eingesetzt wird.

1. **Ausklammern**, falls c=0

Bsp.: $4x^2 + 8x = 0$

$\Rightarrow x(4x+8) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

$\Rightarrow L = \ -2;0$

2. **Radizieren** (nach x^2 auflösen und anschließend Wurzel ziehen), falls b=0

Bsp.: $4x^2 - 8 = 0$
$\Rightarrow x^2 = 2$ ($x^2 = positiv \ \Rightarrow zwei$ Lösungen)
$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$
$\Rightarrow L = \ -\sqrt{2};\sqrt{2}$

$4x^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 = 0$ ($x^2 = 0 \ \Rightarrow eine$ Lösung)
$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 0$

$\Rightarrow L = \ 0$

$4x^2 + 8 = 0$
$\Rightarrow x^2 = -2$ ($x^2 = negativ \ \Rightarrow keine$ Lösung)
$\Rightarrow L = \emptyset$

3. **Quadratische Lösungsformel**, falls $b \neq 0$ und $c \neq 0$.

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{\text{quadratische Lösungsformel}}}$$

<u>Merke</u>:
Der Term in der Lösungsformel, der **<u>unter</u>** der Wurzel steht (also $b^2 - 4ac$) heißt DISKRIMINANTE. Die Diskriminante ist dafür verantwortlich, ob die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung besitzt.

Bsp.: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2)}}{2 \cdot (1)}$$

$(b^2 - 4ac = 1 \quad \textit{ist positiv}$

$\Rightarrow \textit{zwei}$ Lösungen)

$\Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 1$

$\Rightarrow L = \ 1;2$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4)}}{2 \cdot (1)}$$

$(b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow \textit{eine}$ Lösung)

$\Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 2$

$\Rightarrow L = \ 2$

$x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4)}}{2 \cdot (1)}$$

$(b^2 - 4ac = -7 \quad \textit{ist negativ}$

$\Rightarrow \textit{keine}$ Lösung)

$\Rightarrow L = \emptyset$.

Übungsaufgaben Quadratische Gleichungen

	Ergebnisse
Ü1. $4x^2 + 10x = 0$	Ü1. $L = \ -2{,}5; 0$
Ü2. $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$	Ü2. $L = \ 0; 4$
Ü3. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3} = 0$	Ü3. $L = \ -1; 1$
Ü4. $3x^2 - \frac{4}{3} = 0$	Ü4. $L = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$
Ü5. $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$	Ü5. $L = \ -2; 2$
Ü6. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$	Ü6. $L = \ -3; -2$
Ü7. $2x^2 - 2x = 7{,}5$	Ü7. $L = \ -1{,}5; 2{,}5$
Ü8. $5x^2 - 5x - 100 = 0$	Ü8. $L = \ -4; 5$
Ü9. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$	Ü9. $L = \ -3; 2$

VI. GERADEN

A) ZEICHNEN VON GERADEN

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Geraden f lautet:

$$\boxed{f: \quad y = mx + t \qquad \text{mit } m; t \in \mathbb{R}}$$

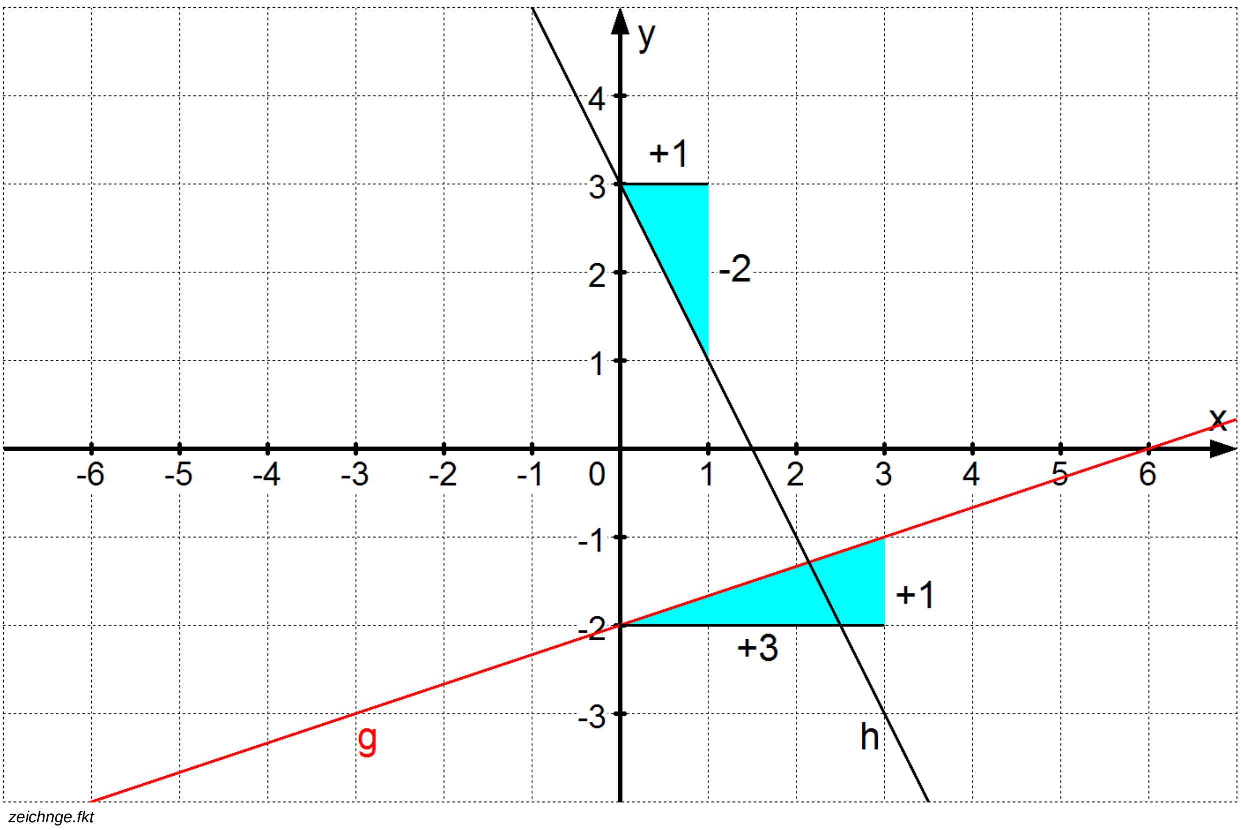
Dabei ist **m** die **Steigung** der Geraden und **t** der **y-Achsenabschnitt**.

Zum Zeichnen der zugehörigen Geraden trägt man vom Schnittpunkt mit der y-Achse (ist durch den y-Achsenabschnitt t bekannt!) und das durch die Steigung m bekannte Steigungsdreieck ein. Am einfachsten ist dieses Steigungsdreieck zu zeichnen, wenn die Steigung m als Bruch dargestellt wird. Der Nenner entspricht der „Strecke" in x-Richtung, der Zähler der „Strecke" in y-Richtung.

Beispiel:

Zeichnen Sie die Geraden g und h mit den Gleichungen $g: \; y = \frac{1}{3}x - 2$ und $h: \; y = -2x + 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

Lösung:



Weitere Übungsaufgaben zum Zeichnen von Geraden

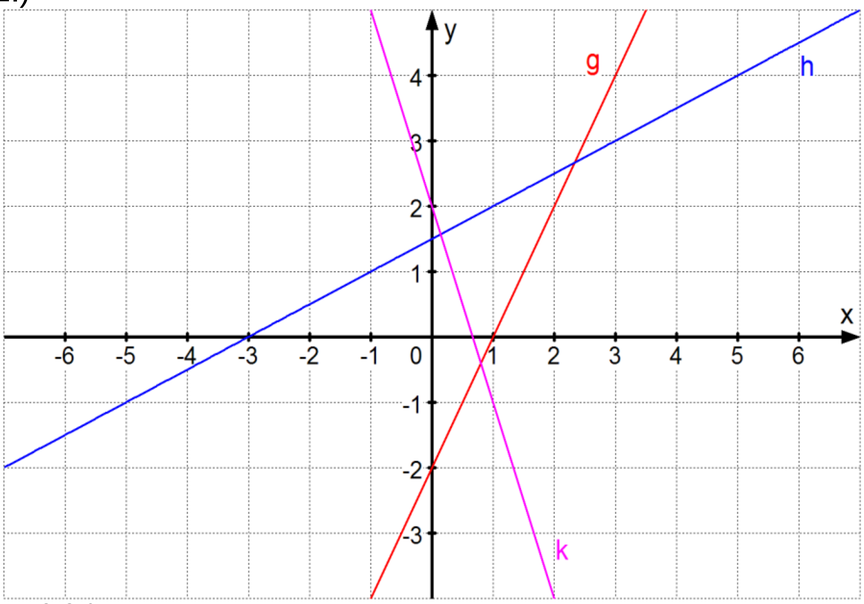
1.) Gegeben sind folgende Geradengleichungen. Zeichnen Sie die jeweilige Gerade in ein kartesisches Koordinatensystem.

a) $g: y = 2x - 2$ b) $h: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ c) $k: y = -3x + 2$

2.) Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und geht durch den Punkt $A\ 1;1$. Zeichnen Sie die Gerade g.

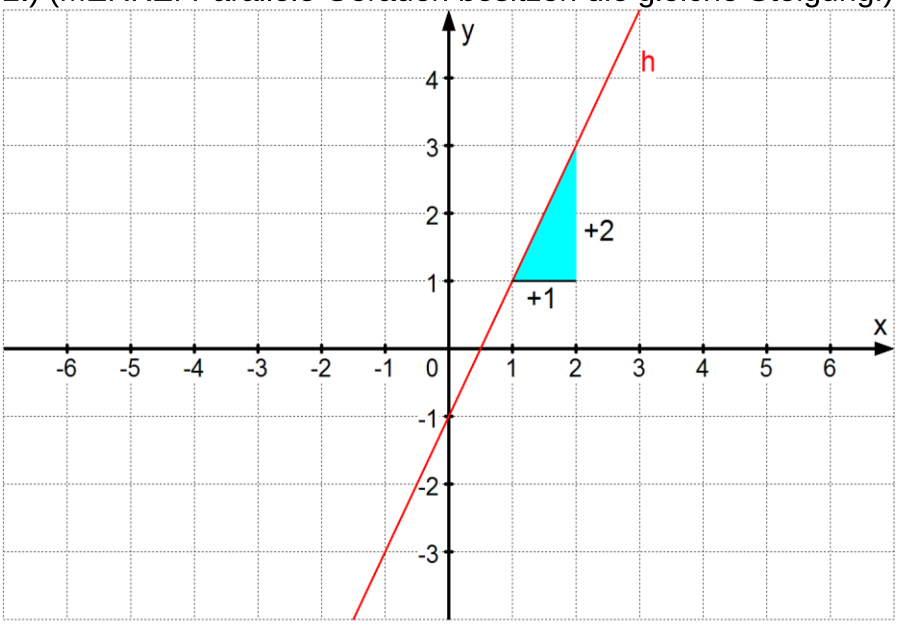
Ergebnisse:

1.)



ZEICHGE2.FKT

2.) (MERKE: Parallele Geraden besitzen die gleiche Steigung!)



ZEICHGE3.FKT

B) ABLESEN VON GERADENGLEICHUNGEN

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Geraden f lautet:

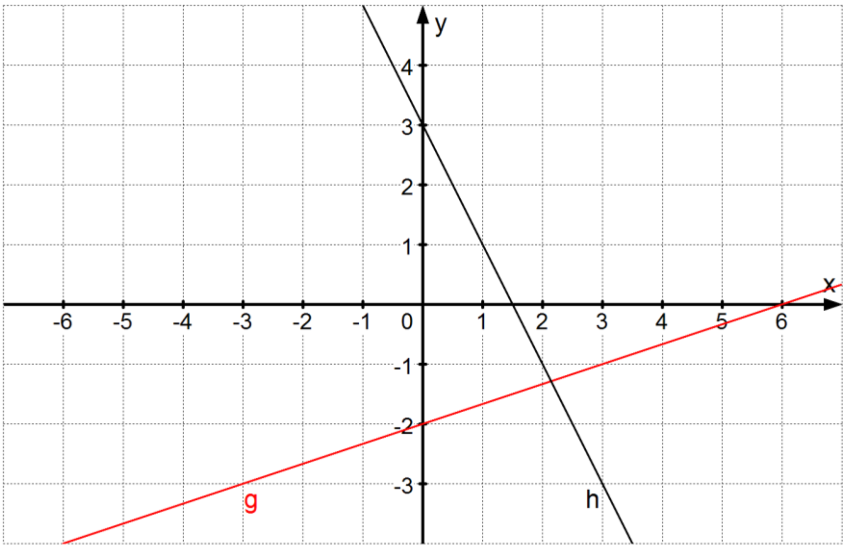
$$\boxed{f: \quad y = mx + t \qquad \text{mit } m;t \in \mathbb{R}}$$

Dabei ist **m** die **Steigung** der Geraden und **t** der **y-Achsenabschnitt**.

Zum Ablesen einer Geradengleichung aus einer Zeichnung liest man zunächst den y-Achsenabschnitt am Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ab. Anschließend sucht man ein geeignetes Steigungsdreieck zwischen zwei Punkten der Geraden aus.

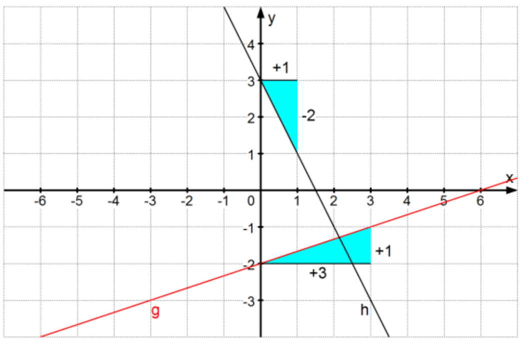
Beispiel:

Geben Sie die Gleichung der gezeichneten Geraden g und h an.



Zeichge5.fkt

Lösung:



zeichnge.fkt

Der y-Achsenabschnitt von g ist -2, der von h ist 3.
Ein geeignetes Steigungsdreieck von g ist +3 LE in x-Richtung und +1 LE nach oben. Dies entspricht einer Steigung von $\frac{1}{3}$.
Bei h kann man beispielsweise +1 LE in x-Richtung und -2 LE in y-Richtung „gehen“. Dies entspricht einer Steigung von $\frac{-2}{1} = -2$.

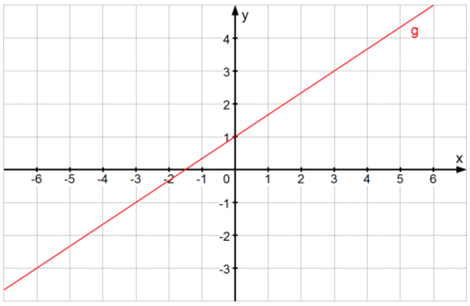
$$\Rightarrow g: \quad y = \tfrac{1}{3}x - 2$$

$$\Rightarrow h: \quad y = -2x + 3$$

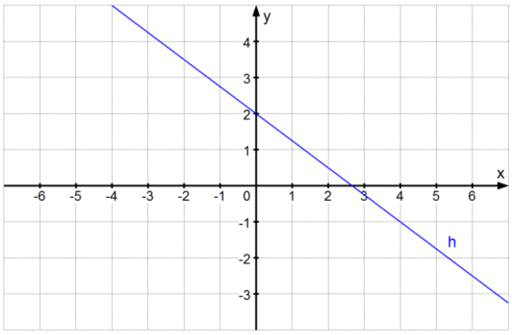
Weitere Übungsaufgaben zum Ablesen von Geradengleichungen

1.) Geben Sie die zu den folgenden Zeichnungen gehörenden Geradengleichungen an.

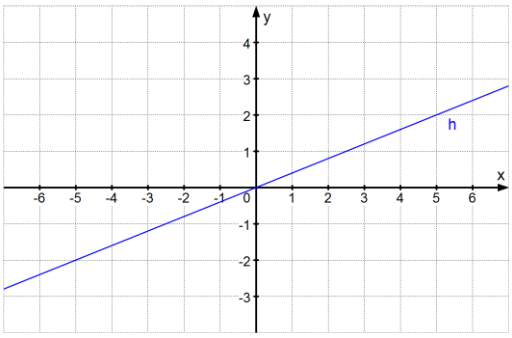
a)



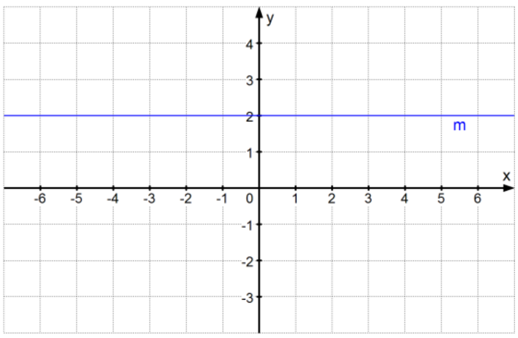
b)



c)



d)



LÖSUNGEN:

a) $g: y = \frac{2}{3}x + 1$ b) $h: y = -\frac{3}{4}x + 2$ c) $h: y = \frac{2}{5}x$ d) $m: y = 2$

C) AUFSTELLEN VON GERADENGLEICHUNGEN

Eine Gerade ist eindeutig festgelegt durch:

- **zwei** verschiedene **Punkte** $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ **oder**
- durch **einen Punkt** und die **Steigung** der Geraden

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Geraden f lautet:

$$\boxed{f: \quad y = mx + t \qquad \text{mit } m;t \in \mathbb{R}}$$

Dabei ist **m** die **Steigung** der Geraden und **t** der **y-Achsenabschnitt**.

Kennt man zwei verschiedene Punkte einer Geraden, lässt sich

1. die **Steigung m** berechnen. Es gilt:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

2. Der **y-Achsenabschnitt t** wird berechnet, indem man dann die Steigung m und die Koordinaten von einem beliebigen Punkt der Geraden in die allgemeine Geradengleichung einsetzt und nach t auflöst.

Beispiel:

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P(-3;-1)$ und $Q(6;5)$. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g.

Lösung:

1. Berechnung der Steigung m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{6-(-3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \textit{alternativ}: m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{-3-6} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

MERKE: Bei der Berechnung der Steigung ist es gleichgültig, welchen der Punkte man als ersten - und welchen als zweiten Punkt verwendet!

2. Berechnung des y-Achsenabschnitts:

Das in 1. berechnete m und einen beliebigen Punkt (im Beispiel Q) in die allgemeine Funktionsgleichung $y = mx + t$ einsetzen:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{y-Wert}\\\text{von Q}}} = \underbrace{\tfrac{2}{3}}_{\substack{\text{Steigung}\\\text{m}}} \cdot \underbrace{6}_{\substack{\text{x-Wert}\\\text{von Q}}} + t \quad \Rightarrow \quad 5 = 4 + t \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g: \quad y = \tfrac{2}{3}x + 1}}$$

Weitere Übungsaufgaben zum Aufstellen von Geradengleichungen

1.) Von einer Geraden g sind zwei Punkte bekannt. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der zugehörigen Gerade.

a) $P\ 1;1$ und $Q\ -1;-5$ b) $M\ 4;3$ und $Q\ 3;1$ c) $A\ -2;7$ und $B\ 1;-8$

2.) Eine Gerade h verläuft parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und geht durch den Punkt $A\ 1;0$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.

Nur für Techniker !!!

3.) Eine Gerade k verläuft senkrecht zur Geraden g mit der Gleichung $y = 2x - 1$ und geht durch den Punkt $A\ 1;0$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden k.

Ergebnisse:

1.) a) $y = 3x - 2$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = -5x - 3$

2.) $y = 2x - 2$ (Merke: Parallele Geraden besitzen die gleiche Steigung!)

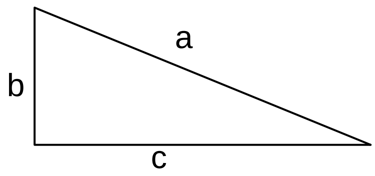
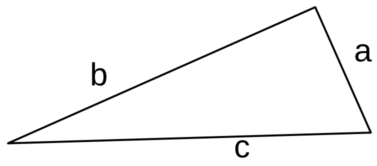
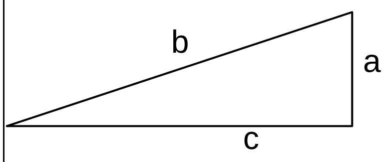
Aufgabe 3 nur für Techniker!!!!

3.) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (Merke: Für die Steigungen zweier zueinander senkrechter Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$)

VII. GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN

A) LEHRSATZ DES PYTHAGORAS

„Im rechtwinkligen Dreieck entspricht die Summe der Kathetenquadrate dem Hypotenusenquadrat.“ Als **„Hypotenuse“** wird die Dreiecksseite bezeichnet, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

		
Hypotenuse ist a $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2$ $\Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$	Hypotenuse ist c $\Rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2$ $\Leftrightarrow \quad a^2 = c^2 - b^2$ $\Leftrightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2$	Hypotenuse ist b $\Rightarrow$ $b^2 = a^2 + c^2$ $\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 - c^2$ $\Leftrightarrow \quad c^2 = b^2 - a^2$

Beispiele:

a) In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge der Hypotenuse 11 cm, die einer Kathete 5 cm. Berechnen Sie die Länge der dritten Seite des Dreiecks.

Lösung:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 11^2 - 5^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 121 - 25$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 96 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{6} = \underline{\underline{4\sqrt{6}}}$$

Die dritte Seite des Dreiecks ist $4\sqrt{6}$ cm lang.

b) Berechnen Sie die Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten $a = 5$ cm und $b = 4$ cm.

Lösung:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = 5^2 + 4^2$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = 25 + 16 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 41$$
$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad b = \underline{\underline{\sqrt{41}}}$$

Die Diagonale des Rechtecks beträgt $\sqrt{41}$ cm.

Weitere Übungsaufgaben zum Lehrsatz des Pythagoras.

1.) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten 24 cm und 7 cm lang. Berechnen Sie die Länge der Hypotenuse.

2.) Die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck ist 17 LE lang, eine der Katheten 15 LE. Berechnen Sie die Länge der anderen Kathete.

3.) Berechnen Sie die Seitenlängen eines Quadrats, dessen Diagonale 8 cm lang ist.

4.) In einem Parallelogramm haben zwei Seiten die Längen 20 cm und 21 cm. Untersuchen Sie, für welche der folgenden Diagonallängen das Parallelogramm ein Rechteck ist: 27 cm, 28 cm oder 29 cm.

5.) In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Punkt $P(4;5)$ gegeben. Berechnen Sie die Entfernung des Punktes P vom Koordinatenursprung.

6.) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P(2;1)$ und $Q(4;5)$ gegeben. Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand der beiden Punkte.

7.) Eine Menge von Rechtecken hat den Umfang $U = 10$ cm. Wie groß sind die Seitenlängen und die Diagonale des Rechtecks mit der kürzesten Diagonale?

Ergebnisse:

1.) 25 cm

2.) 8 LE

3.) $4\sqrt{2}$ cm

4.) 29 cm

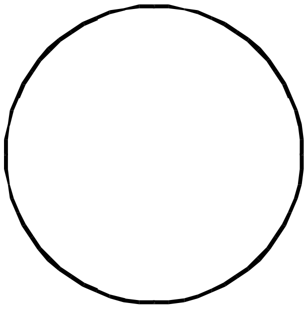
5.) $\sqrt{41}$ (LE)

6.) $2\sqrt{5}$

7.) $a = 2{,}5$ cm, $d = \sqrt{12{,}5}$ cm
(Merke: Quadrat besitzt von allen Rechtecken mit gleichem Umfang die kürzeste Diagonale!)

B) WICHTIGE FORMELN ZU FIGUREN UND KÖRPERN

○ Der Kreis

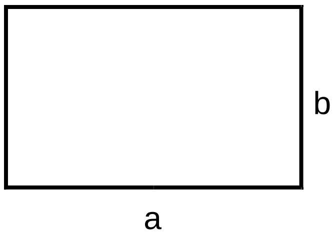


Umfang $\mathbf{U = 2 \cdot r \cdot \pi}$
(r: Radius; Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$)

Fläche $\mathbf{A = r^2 \cdot \pi}$

z.B.: Kreis mit r = 4 (cm)
$U = 2 \cdot \pi \cdot 4 \approx 25{,}13$ (cm)
$A = 4^2 \cdot \pi \approx 50{,}26$ (cm²)

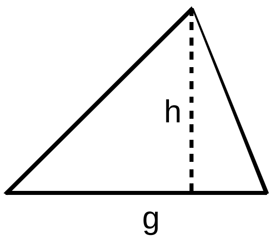
□ Das Rechteck



Fläche $\mathbf{A = a \cdot b}$

z.B.: a = 4 (cm); b = 2,5 (cm)
$A = 4 \cdot 2{,}5 = 10$ (cm²)

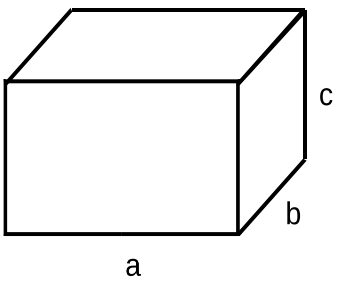
Das Dreieck



Fläche $\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h}$

z.B.: g = 4 (cm); h = 3 (cm)
$A = 1/2 \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (cm²)

Der Quader



Volumen $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$

z.B.: a = 4 (cm); b = 3 (cm); c = 3 (cm)
$V = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (cm³)